УДК 517.925
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-6-1944-1949

О МЕТОДЕ РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ ВОЛН В ЛИНЕЙНОЙ ГЕМОДИНАМИКЕ

© **В. И. Безяев, Н. Х. Садеков**

Российский университет дружбы народов
117198, Российская Федерация, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6
E-mail: vbezyaev@mail.ru

В работе рассматриваются некоторые задачи для линеаризованных уравнений гемодинамики на простейших графах, методом распространяющихся волн и методом продолжения получены точные решения рассматриваемых задач.
Ключевые слова: гемодинамика; гиперболическая система; граф; метод распространяющихся волн; метод продолжений

1. Введение

Для математического описания течения крови в сосудах наиболее распространенными являются квазиодномерные модели (см., например, [1-3]). Применение квазиодномерного приближения позволяет исследовать широкий круг задач гемодинамики на геометрических графах (основы теории дифференциальных уравнений на графах изложены в [4]). В данной работе рассматриваются некоторые задачи для линеаризованных уравнений гемодинамики на простейших графах, методом распространяющихся волн и методом продолжения (см. [5]) получены точные решения рассматриваемых задач. Представленные результаты дополняют исследования в [2].

Уравнения гемодинамики в квазиодномерном приближении представляют собой гиперболическую систему двух дифференциальных уравнений в частных производных и одного алгебраического соотношения. В качестве пространственной переменной x выбирается длина дуги, проходящей через центры круговых поперечных сечений сосуда. Скорость движения крови считается направленной вдоль оси сосуда и одинаковой во всем круговом сечении сосуда. Обозначим $U(x,t)$ — скорость кровотока (см/с), $P(x,t)$ — давление (мм рт. ст.), $S(P)$ — площадь поперечного сечения сосуда (см^2), ρ — плотность крови (г/см^3).

Тогда уравнения гемодинамики в квазиодномерном приближении имеют вид (см. [2]):

$$\begin{gathered}\frac{\partial U}{\partial t}+U\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}=0,\\ \frac{\partial S}{\partial t}+\frac{\partial US}{\partial x}=0,\\ S=S(P),\end{gathered}\tag{1}$$

где первое уравнение описывает закон сохранения импульса, второе — закон сохранения массы крови, а третье — это уравнение состояния, которое отражает упруго-механические свойства сосуда.

Из физиологических исследований известно, что пульсационное отклонение давления, вызванного сердечным выбросом в аорту, от среднего значения в норме составляет примерно 20%. Это позволяет использовать линейное приближение для исходной нелинейной системы уравнений (1) относительно фоновых (средних) значений всех величин, входящих в уравнения. В результате линеаризации исходная система сводится к линейной системе уравнений гиперболического типа с постоянными коэффициентами (см. [1])

$$\begin{cases} u_t + \frac{1}{\rho} p_x + \bar{u} u_x = 0, \\ p_t + \bar{u} p_x + \rho c^2 u_x = 0, \end{cases} \tag{2}$$

где $c = \sqrt{\frac{\bar{s}}{\rho\theta}}$ — скорость распространения пульсовой волны; $\theta = \frac{dS(P)}{dP} > 0$ — коэффициент эластичности сосуда, который характеризует изменение сечения сосуда при изменении давления в нем согласно уравнению состояния; $\bar{u}$, $\bar{p}$, $\bar{s}$ — некоторые фоновые значения, а функции $u(x,t)$ и $p(x,t)$ — малые отклонения от фоновых значений.

2. Задача Коши для линеаризованных уравнений гемодинамики

Рассмотрим задачу Коши для линеаризованных уравнений гемодинамики (2):

$$\begin{cases} u_t + \frac{1}{\rho} p_x + \bar{u} u_x = 0, \qquad (-\infty < x < +\infty,\ t > 0) \\ p_t + \bar{u} p_x + \rho c^2 u_x = 0, \\ u|_{t=0} = \phi(x), \\ p|_{t=0} = \psi(x), \end{cases} \tag{3}$$

где $\phi(x)$ и $\psi(x)$ — заданные функции.

Используя инварианты Римана (см., например, [6]), получим представление общего решения системы (2) в виде:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{f(x-\lambda^+ t) + g(x-\lambda^- t)}{2}, \\ p(x,t) &= \rho c \frac{f(x-\lambda^+ t) - g(x-\lambda^- t)}{2}, \end{aligned} \tag{4}$$

где $\lambda^+ = \bar{u} + c$, $\lambda^- = \bar{u} - c$. Функции f и g представляют собой бегущие волны произвольной формы.

Как видно из (4), общим решением уравнений (2) является суперпозиция двух бегущих волн, одна из которых распространяется по направлению движения крови в сосуде, а вторая — в противоположном направлении.

Т е о р е м а 1. *Решение задачи Коши (3) имеет следующий вид:*

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{\phi(x-\lambda^+ t) + \phi(x-\lambda^- t)}{2} + \frac{\psi(x-\lambda^+ t) - \psi(x-\lambda^- t)}{2\rho c}, \\ p(x,t) &= \rho c \frac{\phi(x-\lambda^+ t) - \phi(x-\lambda^- t)}{2} + \frac{\psi(x-\lambda^+ t) + \psi(x-\lambda^- t)}{2}. \end{aligned} \tag{5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Подставим общее решение (4) в начальные условия задачи (3):

$$\frac{f(x)+g(x)}{2} = \phi(x),$$
$$\rho c \frac{f(x)-g(x)}{2} = \psi(x).$$

Определяя из них функции

$$f(x) = \phi(x) + \frac{\psi(x)}{\rho c}, \qquad g(x) = \phi(x) - \frac{\psi(x)}{\rho c}$$

и подставляя в общее решение (4), получим искомое решение задачи Коши (3) в виде (5). □

3. Смешанная задача на графе одного сосуда

Рассмотрим один полуограниченный сосуд бесконечной длины. Представим такой сосуд ориентированным графом Γ_1 , состоящим из одной вершины и выходящего из нее ребра бесконечной длины, направленного вдоль оси сосуда. Введем на ребре систему координат с началом в этой вершине, пространственную ось которой направим вдоль ребра.

Пусть на ребре графа заданы линеаризованные уравнения гемодинамики (2) и начальные данные, а в вершине определены краевые условия 1-го рода. Тогда имеем следующую смешанную задачу на графе Γ_1 :

$$\begin{cases} u_t + \frac{1}{\rho}p_x + \bar{u}u_x = 0, \qquad (0 < x < +\infty,\ t > 0) \\ p_t + \bar{u}p_x + \rho c^2 u_x = 0, \\ u|_{t=0} = \phi(x), \\ p|_{t=0} = \psi(x), \\ u|_{x=0} = \nu(t), \\ p|_{x=0} = \mu(t), \end{cases} \tag{6}$$

где $\phi(x)$, $\psi(x)$ и $\nu(t)$, $\mu(t)$ — заданные функции.

Т е о р е м а 2. *Решение смешанной задачи (6) имеет следующий вид*

$$\begin{gathered} u(x,t) = \begin{cases} \frac{\phi(x-\lambda^+t)+\phi(x-\lambda^-t)}{2} + \frac{\psi(x-\lambda^+t)-\psi(x-\lambda^-t)}{2\rho c}, & x \ge \lambda^+ t \\ \nu(-\frac{x-\lambda^+t}{\lambda^+}) - \frac{\phi(\frac{\lambda^-}{\lambda^+}x-\lambda^-t)-\phi(x-\lambda^-t)}{2} + \frac{\psi(\frac{\lambda^-}{\lambda^+}x-\lambda^-t)-\psi(x-\lambda^-t)}{2\rho c}, & x < \lambda^+ t \end{cases} \\ p(x,t) = \begin{cases} \rho c\frac{\phi(x-\lambda^+t)-\phi(x-\lambda^-t)}{2} + \frac{\psi(x-\lambda^+t)+\psi(x-\lambda^-t)}{2}, & x \ge \lambda^+ t \\ \mu(-\frac{x-\lambda^+t}{\lambda^+}) - \rho c\frac{\phi(\frac{\lambda^-}{\lambda^+}x-\lambda^-t)+\phi(x-\lambda^-t)}{2} + \frac{\psi(\frac{\lambda^-}{\lambda^+}x-\lambda^-t)+\psi(x-\lambda^-t)}{2}, & x < \lambda^+ t \end{cases} \end{gathered} \tag{7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В формулах (4) общего решения линеаризованных уравнений гемодинамики определим функции f и g так, чтобы они удовлетворяли начальным и граничным условиям системы (6). Областью определения функции $f(x-\lambda^+t)$ в данном случае является вся прямая $(-\infty,+\infty)$, а функции $g(x-\lambda^-t)$ — полуось $[0,+\infty)$.

Подстановка общего решения в начальные условия позволяет определить f и g на полуоси $[0,+\infty)$ следующим образом:

$$f(z) = \phi(z) + \frac{\psi(z)}{\rho c}, \qquad g(z) = \phi(z) - \frac{\psi(z)}{\rho c}, \qquad z \ge 0. \tag{8}$$

Осталось определить функцию f на оставшейся части ее области определения, т. е. на интервале $(-\infty,0)$. Используя краевое условие $u(0,t)=\nu(t)$ и первую формулу в (4), получим

$$f(z) = 2\nu\left(-\frac{z}{\lambda^+}\right) - \phi\left(\frac{\lambda^-}{\lambda^+}z\right) + \frac{1}{\rho c}\psi\left(\frac{\lambda^-}{\lambda^+}z\right), \qquad z < 0. \tag{9}$$

Используя теперь условие $p(0,t)=\mu(t)$, получаем

$$f(z) = \frac{2}{\rho c}\mu\left(-\frac{z}{\lambda^+}\right) + \phi\left(\frac{\lambda^-}{\lambda^+}z\right) - \frac{1}{\rho c}\psi\left(\frac{\lambda^-}{\lambda^+}z\right), \qquad z < 0. \tag{10}$$

Используя теперь формулы (8)–(10) и (4), получим решение смешанной задачи (6) на графе Γ_1 в виде (7). $\square$

4. Смешанная задача на графе двух сосудов

Рассмотрим теперь стык двух полуограниченных сосудов. Представим его ориентированным графом Γ_2, состоящим из одной вершины и двух ребер бесконечной длины, один из которых направлен к вершине, а другой — из нее. Введем систему координат с началом в этой вершине, а пространственную ось направим вдоль ребер так, что отрицательные координаты будут соответствовать входящему в вершину ребру, а положительные — выходящему из нее.

Пусть на каждом ребре $i\,(i=1,2)$ графа Γ_2 заданы линеаризованные уравнения гемодинамики (2) и начальные данные, а в вершине выполняются линеаризованные условия сопряжения, первое из которых выражает закон сохранения массы крови (т. е. поток крови в первом сосуде равен потоку крови во втором), а второе — равенство давлений на стыке сосудов (см. [2]).

Таким образом получаем смешанную задачу для линейных уравнений с кусочно-постоянными на графе Γ_2 коэффициентами вида

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_i}{\partial t} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p_i}{\partial x} + \bar{u}\dfrac{\partial u_i}{\partial x} = 0, \ (-\infty < x < 0,\ 0 < x < +\infty,\ t > 0) \\ \dfrac{\partial p_i}{\partial t} + \bar{u}\dfrac{\partial p_i}{\partial x} + \rho c^2 \dfrac{\partial u_i}{\partial x} = 0, \\ u_i(x,0) = \phi_i(x), \\ p_i(x,0) = \psi_i(x), \\ \bar{s}_1 u_1(0,t) + \theta_1 \bar{u}_1 p_1(0,t) = \bar{s}_2 u_2(0,t) + \theta_2 \bar{u}_2 p_2(0,t), \\ p_1(0,t) = p_2(0,t), \end{cases} \tag{11}$$

где $i=1$, если $x<0$, и $i=2$, если $x>0$.

Общие решения линеаризованных уравнений гемодинамики на каждом ребре определяются по формулам (4). Области определения функций f_i и g_i находятся из того, что эти функции удовлетворяют начальным условиям и условиям сопряжения. Таким образом получаем, что областью определения функции f_1 является полуось $(-\infty, 0]$, функций g_1 и f_2 — вся прямая $(-\infty, +\infty)$, а функции g_2 — полуось $[0, +\infty)$.

Подстановка общих решений в начальные условия позволяет определить f_1 и g_1 на полуоси $(-\infty, 0]$, а f_2 и g_2 на полуоси $[0, +\infty)$:

$$f_i(z) = \phi_i(z) + \frac{\psi_i(z)}{\rho c_i}, \qquad\qquad g_i(z) = \phi_i(z) - \frac{\psi_i(z)}{\rho c_i}, \tag{12}$$

где $z \le 0$, если $i=1$, и $z \ge 0$, если $i=2$.

Функции g_1 и f_2 на оставшихся частях их областей определения найдем, подставляя общие решения (4) в условия сопряжения. Переобозначая их соответственно G_1 и F_2, получим:

$$\begin{aligned} G_1(z) &= k_{1\to1}\, f_1\left(\frac{\lambda_1^+}{\lambda_1^-} z\right) + k_{2\to1}\, g_2\left(\frac{\lambda_2^-}{\lambda_1^-} z\right), \quad z > 0 \\ F_2(z) &= k_{1\to2}\, f_1\left(\frac{\lambda_1^+}{\lambda_2^+} z\right) + k_{2\to2}\, g_2\left(\frac{\lambda_2^-}{\lambda_2^+} z\right), \quad z < 0, \end{aligned} \tag{13}$$

где $k_{1\to1}, k_{2\to1}, k_{1\to2}, k_{2\to2}$ — коэффициенты, вычисляемые по формулам

$$k_{i\to i} = 1 - \frac{2\bar{s}_i}{\rho c_i \left(\frac{\bar{s}_1(c_1 - \bar{u}_1)}{\rho c_1^2} + \frac{\bar{s}_2(c_2 + \bar{u}_2)}{\rho c_2^2}\right)}, \quad k_{i\to j} = -\frac{2\bar{s}_i}{\rho c_j \left(\frac{\bar{s}_1(c_1 - \bar{u}_1)}{\rho c_1^2} + \frac{\bar{s}_2(c_2 + \bar{u}_2)}{\rho c_2^2}\right)}, \qquad i \ne j.$$

Из формул (13) видно, что волны G_1 и F_2, распространяющиеся по ребрам графа Γ_2 по направлению от его вершины, представляют собой суперпозиции волн f_1 и g_2, распространяющихся по ребрам графа по направлению к вершине. При этом коэффициент $k_{i\to j}$ показывает, во сколько раз изменится амплитуда соответствующей волны при прохождении ею через вершину графа из i-го ребра в j-ое, а коэффициент $k_{i\to i}$ характеризует изменение амплитуды волны, распространяющейся по i-му ребру, после ее отражения от вершины графа.

Подставляя полученные функции из (12) – (13) в формулы (4) на каждом ребре, окончательно получим решение смешанной задачи на графе Γ_2 в следующем виде:

$$u(x,t)=\begin{cases}\dfrac{f_1(x-\lambda_1^+t)+g_1(x-\lambda_1^-t)}{2}, & x\le\lambda_1^-t,\ x<0,\\ \dfrac{f_1(x-\lambda_1^+t)+G_1(x-\lambda_1^-t)}{2}, & x>\lambda_1^-t,\ x<0,\\ \dfrac{f_2(x-\lambda_2^+t)+g_2(x-\lambda_2^-t)}{2}, & x\ge\lambda_2^+t,\ x>0,\\ \dfrac{F_2(x-\lambda_2^+t)+g_2(x-\lambda_2^-t)}{2}, & x<\lambda_2^+t,\ x>0,\end{cases} \tag{14}$$

$$p(x,t)=\begin{cases}\rho c\dfrac{f_1(x-\lambda_1^+t)-g_1(x-\lambda_1^-t)}{2}, & x\le\lambda_1^-t,\ x<0,\\ \rho c\dfrac{f_1(x-\lambda_1^+t)-G_1(x-\lambda_1^-t)}{2}, & x>\lambda_1^-t,\ x<0,\\ \rho c\dfrac{f_2(x-\lambda_2^+t)-g_2(x-\lambda_2^-t)}{2}, & x\ge\lambda_2^+t,\ x>0,\\ \rho c\dfrac{F_2(x-\lambda_2^+t)-g_2(x-\lambda_2^-t)}{2}, & x<\lambda_2^+t,\ x>0.\end{cases} \tag{15}$$

Таким образом, нами доказана

Т е о р е м а 3. *Решение смешанной задачи (11) имеет вид (14), (15).*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кошелев В. Б. и др.* Математические модели квази-одномерной гемодинамики. М.: МАКС Пресс, 2010.

2. *Абакумов Н. В. и др.* Методика математического моделирования сердечно-сосудистой системы // Математическое моделирование. 2000. Т. 12. № 2. С. 106–117.

3. *Буничева А. Я. и др.* Исследование влияния гравитационных перегрузок на параметры кровотока в сосудах большого круга кровообращения // Математическое моделирование. 2012. Т. 24. № 7. С. 67–82.

4. *Покорный Ю. В. и др.* Дифференциальные уравнения на геометрических графах. М.: Физматлит, 2004.

5. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М.: Изд. МГУ, 2004.

6. *Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.* Системы квазилинейных и их приложения к газовой динамике. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988.

Поступила в редакцию 5 октября 2016 г.

Безяев Владимир Иванович, Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики, e-mail: vbezyaev@mail.ru

Садеков Наиль Халимович, Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация, студент магистратуры, кафедра прикладной математики, e-mail: nail.sadd@mail.ru

UDC 517.925
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-6-1944-1949

A WAVE PROPAGATION METHOD IN LINEAR HEMODYNAMICS

© **V. I. Bezyaev, N. Kh. Sadekov**

Peoples Friendship University of Russia
6 Miklukho-Maklay St., Moscow, Russian Federation, 117198
E-mail: vbezyaev@mail.ru

In the work examines some problems for the linearized equations of hemodynamics on simple graphs. By the method of propagating waves and by the continuation method obtained exact solutions of these problems.

Key words: hemodynamics; graph; hyperbolic system; a wave propagation method; continuation method

REFERENCES

1. *Koshelev V. B. i dr.* Matematicheskie modeli kvazi-odnomernoj gemodinamiki. M.: MAKS Press, 2010.
2. *Abakumov N. V. i dr.* Metodika matematicheskogo modelirovaniya serdechno-sosudistoj sistemy // Matematicheskoe modelirovanie. 2000. T. 12. № 2. S. 106–117.
3. *Bunicheva A. YA. i dr.* Issledovanie vliyaniya gravitacionnyh peregruzok na parametry krovotoka v sosudah bol'shogo kruga krovoobrashcheniya // Matematicheskoe modelirovanie. 2012. T. 24. № 7. S. 67–82.
4. *Pokornyj YU. V. i dr.* Differencial'nye uravneniya na geometricheskih grafah. M.: Fizmatlit, 2004.
5. *Tihonov A. N., Samarskij A. A.* Uravneniya matematicheskoj fiziki. M.: Izd. MGU, 2004.
6. *Rozhdestvenskij B. L., YAnenko N. N.* Sistemy kvazilinejnyh i ih prilozheniya k gazovoj dinamike. Uravneniya matematicheskoj fiziki. M.: Nauka, 1988.

Received 5 October 2016

Bezyaev Vladimir Ivanovich, Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Applied Mathematics Department, e-mail: vbezyaev@mail.ru

Sadekov Nail Khalimovich, Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, the Russian Federation, Graduate Student, Applied Mathematics Department, e-mail: nail.sadd@mail.ru

Информация для цитирования:

Безяев В.И., Садеков Н.Х. О методе распространяющихся волн в линейной гемодинамике // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2016. Т. 21. Вып. 6. С. 1944-1949.
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-6-1944-1949

Bezyaev V.I., Sadekov N.Kh. O metode rasprostranyayushchihsya voln v linejnoj gemodinamike [A wave propagation method in linear hemodynamics]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Review. Series: Natural and Technical Sciences*, 2016, vol. 21, no. 6, pp. 1944-1949.
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-6-1944-1949 (In Russian)